

Leitende
Aufgabenstellung
Elektrotechnik

Pascal Jenni, Romino Florio, Marc Landolt

Inhaltsverzeichnis? Wollen wir eins?

Hinweise zur Darstellung

$f(x, y, \dots)$	Funktion f mit den unabhängigen Variablen x, y, \dots
j	Imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
\underline{Z}	Komplexe Zahl
\underline{I}^*	Komplex konjugierte Zahl
$\Re(\underline{Z}) = \text{Re}(\underline{Z})$	Realteil der komplexen Zahl \underline{Z}
$\Im(\underline{Z}) = \text{Im}(\underline{Z})$	Imaginärteil der komplexen Zahl \underline{Z}
$Z = \underline{Z} = \text{abs}(\underline{Z})$	Betrag einer komplexen Zahl also $\sqrt{\Re(\underline{Z})^2 + \Im(\underline{Z})^2}$
$\varphi_Z = \arg(\underline{Z})$	Winkel gegenüber der Abszisse $\arctan\left(\frac{\Im(\underline{Z})}{\Re(\underline{Z})}\right)$
${}_{(i)} f = \{50, 60\} \text{Hz}$	Menge von Zahlen, also wenn z.B. mehrere Gleichungen auf mehrere Werte angewendet werden sollen, hier soll also einmal mit 50Hz und einmal mit 60Hz gerechnet werden, dadurch entsteht jeweils wieder eine Lösungsmenge
\vec{e}_y	Einheitsvektor in Richtung der Ordinate
$H_{(m,n)}$	Matrix mit m vertikalen und n horizontalen Werten
$\vec{H}_{(m,n)}$	Dasselbe wie oben, aber jedes Matrixelement besteht aus einem Vektor Also einer x und einer y Komponente

1 Teilaufgabe A

1.1 A1: Spannungsquellen und Masse des Drehstromnetzes

In Schema „POW_07_08 Elektrotechnik Bild 01“ finden wir heraus, dass es sich um 115V Spannung handelt, da normalerweise typischerweise auf Anlagentypenschildern die Spannung folgendermassen angegeben ist,

400/240V

Wissen wir nicht handelt es sich um ein 200/115V oder um ein 115/66V Netz, da in Schema „POW_07_08 Elektrotechnik Bild 03“ nur die 3 Phasen und nicht der Neutraleiter auf den „Voltage Regulator“ gehen, vermuten wir, dass es sich bei diesen Spannungen nicht um die Strang, sondern um die Leiterspannungen handelt. Jedoch könnte die Steuerung des Erregers auch genau so gut auf die 200V überwacht werden. Wir schauen im Internet nach und finden mehrere Quellen mit folgender Aussage „Commercial aircraft use 115/200V, 400 Hz power“ z.B. aus einem Dokument¹ von 1995.

200/115V

Somit haben wir folgende gegebene Daten:

$$U_1 = U_2 = U_3 = 115V \quad (=11.5\text{cm}) \quad U_{12} = U_{23} = U_{31} = \sqrt{3} \cdot U_1 = 199.19V \approx 200V \quad (=20\text{cm})$$

$$P = 100\text{kW} \quad \cos \varphi = 0.9$$

Daraus lassen sich folgende Werte berechnen:

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{100\text{kW}}{0.9} = 111.111\text{kVA}$$

$$S_{Str} = \frac{S}{3} = \frac{111.111\text{kVA}}{3} = 37.037\text{kVA}$$

$$I = I_{Leiter} = I_{Str} = \frac{S_{Str}}{U_{Str}} = \frac{37.037\text{kVA}}{115V} = 322.061\text{A} \quad (=6.44\text{cm})$$

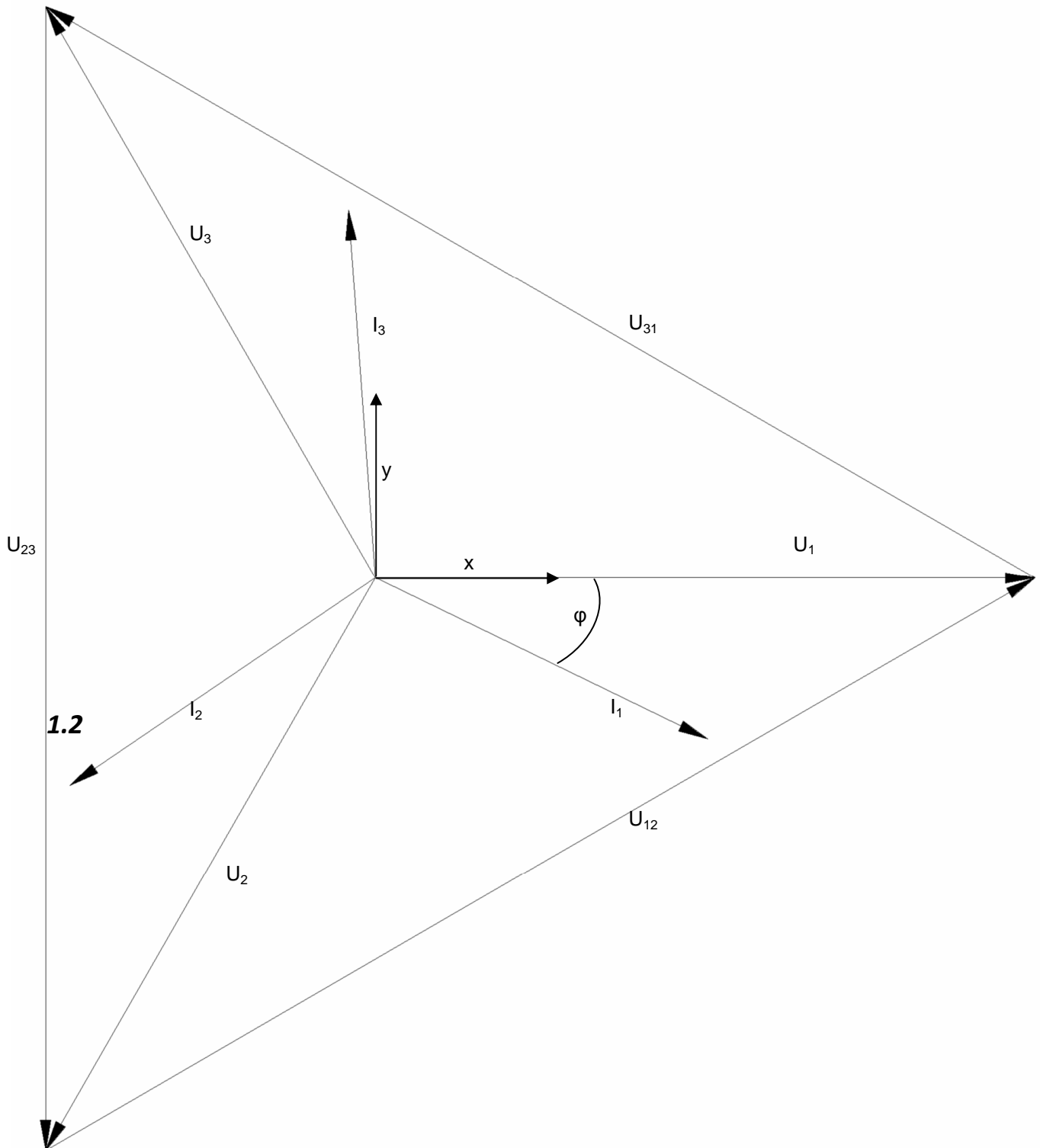
$$\varphi = \arccos(\cos \varphi) = \arccos(0.9) = 25.842^\circ$$

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi = 0^\circ - 25.842^\circ = -25.842^\circ$$

¹ <http://www.epa.gov/otaq/regs/nonroad/aviation/faa-ac.pdf>

Zeigerdiagramm

Masstab Spannung: 10V/cm
Masstab Strom: 50A/cm



A2: Einphasiges oder dreiphasiges Bordnetz

Wirkleistung (Wert von A1)

$$P = konst = 100kW$$

Leistungsfaktor (Wert von A1)

$$\cos(\varphi) = konst = 0.9$$

Max. Stromdichte

$$J = konst = 6 \frac{A}{mm^2}$$

Dichte Kupferdraht:

$$\delta = 8.96kg/dm^3$$

Scheinleistung

$$S = \frac{P}{\cos(\varphi)} = 111,111kVA$$

Volumen

$$V = A \cdot l$$

Masse

$$m = V \cdot \delta$$

1.2.1 Drei Phasen Bordnetz

Strom

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot U} = 320.750A$$

Querschnitt

$$A = \frac{I}{J} = \frac{320.750}{6} = 53.458mm^2$$

Da es 3 Phasen sind, ist der Gesamtquerschnitt dreimal so gross also:

$$A_{tot3} = 160.375mm^2$$

1.2.2 Ein Phasen Bordnetz

Strom

$$I = \frac{S}{U} = 555.555A$$

Querschnitt

$$A = \frac{I}{J} = \frac{555.555}{6} = 92.592mm^2$$

Da es eine hin und eine Rückleitung hat ist der Gesamtquerschnitt zweimal so gross also:

$$A_{tot1} = 185.185mm^2$$

Und fällt somit schwerer aus als beim 3 Phasen Bordnetz

1.2.3 Querschnitt pro Phase

$$A_1 = \frac{S}{J \cdot U}$$

$$A_3 = \frac{S}{J \cdot \sqrt{3} \cdot U}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735026$$

1.2.4 Querschnitt total

$$A_{tot1} = 2 \cdot \frac{S}{J \cdot U}$$

$$A_{tot3} = 3 \cdot \frac{S}{J \cdot \sqrt{3} \cdot U}$$

$$\frac{A_{tot3}}{A_{tot1}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{27}}{6} = 0.86602587$$

1.2.5 Lösung

	Absolut		Verhältnis	
	3 Phasen	1 Phasen	3 Phasen	1 Phasen
Querschnitt pro Leiter ($A_3:A_1$)	53.458	92.592	0.57735026	1
Gesamtquerschnitt ($A_{tot3}:A_{tot1}$)	160.375	185.185	0.86602587	1
Volumen pro Meter Länge in mm^3	160375	185185	0.86602587	1
Volumen pro Meter Länge in dm^3	0.160375	0.185185	0.86602587	1
Kupfermasse Volumen*Dichte	1.43696	1.6592576	0.86602587	1
Isolationsmasse	3	2	<1.5*	1

*) Kleiner 1.5 weil der Drahtdurchmesser zusätzlich noch kleiner ist und somit die Isolation etwas geringer ausfällt, was aber nur bei dickem Kabel z.B. „kurzschlussfestem“ Kabel gross einen grossen Unterschied machen würde. Da dies gefordert ist, hier noch eine genauere Berechnung

Wir nehmen genug Isolation, da es keinen Kurzschluss geben sollte. Also einen halben cm.

$$d := 0.005;$$

Wir nehmen den Querschnitt, der sich mit der Stromdichte 6 A/mm² ergeben hat.

$$A := 92.5E-6;$$

$$A1 := 1 \cdot A;$$

$$A2 := \frac{1 \cdot A}{\sqrt{3}};$$

$$A_{ring1} := 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{A1}{\pi}} + d \right)^2 \cdot \pi - A1;$$

$$A_{ring2} := 3 \cdot \left(\sqrt{\frac{A2}{\pi}} + d \right)^2 \cdot \pi - A2;$$

$$x := \text{simplify}\left(\frac{A_{ring2}}{A_{ring1}}\right); \quad = 1.237921558$$

Das Verhältnis in unserem Beispiel ist also 1:1.23, ist aber nicht konstant sondern hängt auch noch von d also der Dicke der Isolation ab.

1.3 A3: Eisenmasse und Spannung

1.3.1 Eisenquerschnitt

Wir wissen aus Experimenten mit Magneten und Leiterschleifen, dass folgendes gilt:

$$u(t) = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (\text{Induktionsgesetz})$$

Da wir aber nur den Verlauf der Spannung direkt messen können, also u bekannt ist setzen wir für

$$u(t) = \hat{U} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad \text{und erhalten}$$

$$\hat{U} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Um Φ zu bekommen nehmen wir $-N$ auf die andere Seite und integrieren das ganze nach t

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \cdot \int \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot dt$$

Mittels Substitutionsregel (s als Substitutionsvariabel) erhalten wir:

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \cdot \int \sin(s) \cdot dt$$

$$s = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t \quad \frac{ds}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot f \quad dt = \frac{ds}{2 \cdot \pi \cdot f}$$

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \int \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \frac{\hat{U}}{-N} \int \sin(s) \cdot \frac{ds}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\hat{U}}{-N} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f} \int \sin(s) \cdot ds$$

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \frac{-\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot f} + C$$

+C lassen wir weg, da Φ um einen Nullpunkt schwingt.

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \frac{-\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot f} \quad \text{und } \Phi = A \cdot B$$

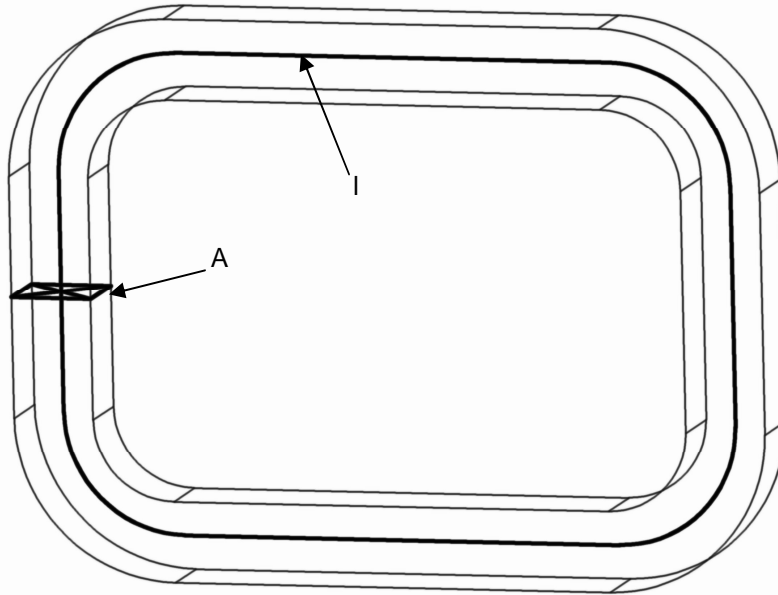
$$A = \frac{\hat{U} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad B = B_{\max} \text{ also im Prinzip } \hat{B}$$

$$A_{\max} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\hat{U} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \right) = \frac{\hat{U}}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{\underline{\underline{N \cdot B_{\max} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}}}$$

1.3.2 Eisenmasse

Folglich können wir die Frage nach der Masse folgendermassen beantworten:

Nehmen wir einen Schnittbandkern der abgerundete Ecken hat, lässt sich dessen Volumen mit Hilfe der Mittleren Fase (die Linie durch den Schwerpunkt der der Fläche A) in etwa so berechnen:



$$V = A \cdot l$$

V: Volumen
A: Fläche des Eisenkerns
l: Mittlere Fase, oder auch
Mittlere Feldlinienlänge im Kern

Folglich lässt sich seine Masse so berechnen:

$$m_{Fe} = V \cdot \rho = \rho \cdot l \cdot A = \frac{\rho \cdot l \cdot \sqrt{2} \cdot U}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{m_{Fe} = f_1(U) = \frac{\rho \cdot l \cdot \sqrt{2} \cdot U}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}}}$$

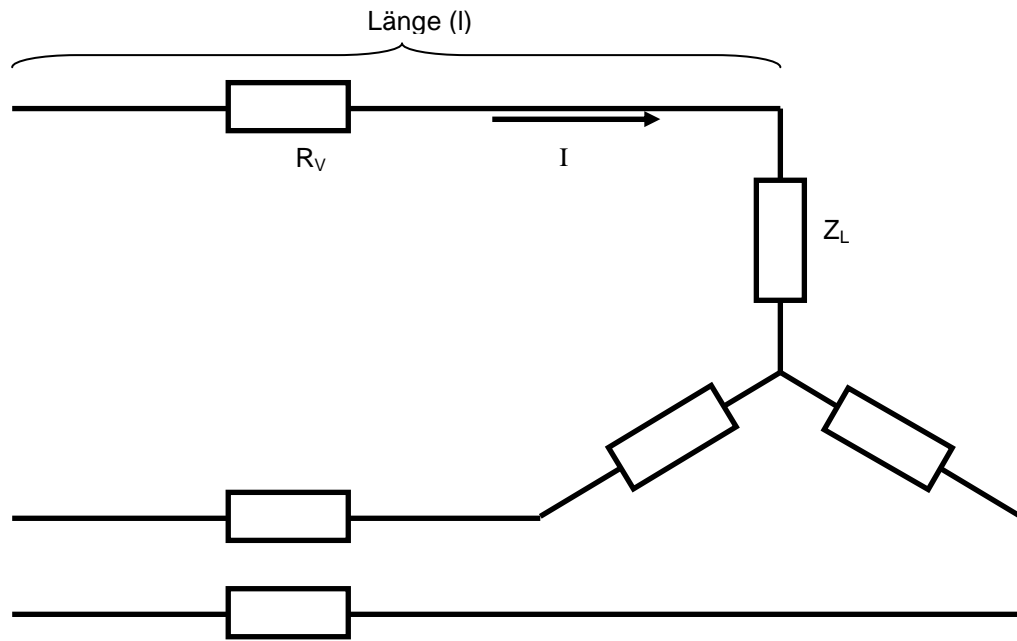
m_{Fe} : Eisenmasse
U: Effektivwert der Spannung
N: Die Windungen (Primärwicklung)
B: Maximale magnetische Flussdichte
f: Frequenz

$$\rho \quad \text{Dichte Eisen, ca. } \frac{7kg}{dm^3} = \frac{7000kg}{m^3}$$

Verdoppeln wir die Spannung verdoppelt sich die Masse des Eisens.

1.4 A4: Kupfermasse

Hier bekommen wir ein kleines Problem mit dem Rho, das einerseits für den spezifischen Widerstand, andererseits für die Dichte gebraucht wird. Wir nehmen deshalb ausnahmsweise **für die Dichte** ein anderes Symbol und zwar **das kleine Delta (δ)**



1.4.1 Generelle Formeln

$$m_{Fe} = V \cdot \delta = A \cdot l \cdot \delta$$

$$\rho = \frac{R \cdot A}{l} \quad [\rho] = \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \cdot \text{m} \quad R = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

1.4.2 a) Wirkleistungsverlust (P_V)

$$m_{Fe} = V \cdot \delta = A \cdot l \cdot \delta = f_1(P_V, I, \dots)$$

$$\frac{\rho \cdot l}{A} = R_V \quad \frac{\rho \cdot l}{A} \cdot I_{Str} = R_V \cdot I_{Str} = U_V \quad \frac{\rho \cdot l}{A} \cdot I_{Str} \cdot I_{Str} = R_V \cdot I_{Str} \cdot I_{Str} = U_V \cdot I_{Str} = P_{VStr}$$

$$A = \frac{\rho \cdot l \cdot I_{Str}^2}{P_V} \quad \text{und} \quad m_F = V \cdot \delta = A \cdot l \cdot \delta$$

$$m_{Cu1Phase} = f(P_V, I, \dots) = \frac{\rho \cdot l^2 \cdot I_{Str}^2 \cdot \delta}{P_{VStr}} = \left[\frac{|\Omega \cdot \text{m}| \cdot |\text{m}^2| \cdot |\text{A}^2| \cdot \text{kg}}{|\text{W}| \cdot \text{m}^3} = \frac{\left| \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \text{m} \right| \cdot |\text{m}^2| \cdot |\text{A}^2| \cdot \text{kg}}{|\text{VA}| \cdot \text{m}^3} = \text{kg} \right]$$

Für alle 3 Leitungen gilt also:

$$P_{VStr} = \frac{P_V}{3} \quad m_{Cu} = m_{Cu1Phase} \cdot 3$$

$$m_{Cu} = f(P_V, I, \dots) = \frac{3 \cdot \rho \cdot l^2 \cdot I_{Str}^2 \cdot \delta}{\frac{P_V}{3}} = \frac{9 \cdot \rho \cdot l^2 \cdot I_{Str}^2 \cdot \delta}{P_V}$$

1.4.3 b) Maximaler Spannungsabfall

$$m_{Fe} = V \cdot \delta = A \cdot l \cdot \delta = f_1(\Delta U_{\max}, I, \dots)$$

$$\frac{\rho \cdot l}{A} = R_V \quad \frac{\rho \cdot l}{A} \cdot I_{Str} = R_V \cdot I_{Str} = U_V$$

$$A = \frac{\rho \cdot l \cdot I_{Str}}{U_V} \quad \text{und} \quad m_{Cu1Phase} = V \cdot \delta = A \cdot l \cdot \delta$$

$$m_{Cu1Phase} = f(\Delta U_V, I, \dots) = \frac{\rho \cdot l^2 \cdot I_{Str} \cdot \delta}{\Delta U_V} \quad \Delta U_V = \Delta U_{\max}$$

Für alle 3 Leitungen also

$$m_{Cu} = m_{Cu1Phase} \cdot 3$$

$$m_{Cu} = f(\Delta U_V, I, \dots) = \frac{3 \cdot \rho \cdot l^2 \cdot I_{Str} \cdot \delta}{\Delta U_V}$$

2 Frequenzabhängigkeit des Bordnetzes

2.1 B1: Eisenmasse und Frequenz

(Dies ist im Prinzip dieselbe Problemstellung wie in Aufgabe A3 dar, deshalb haben wir den grössten teil einfach kopiert)

2.1.1 Eisenquerschnitt

Wir wissen aus Experimenten mit Magneten und Leiterschleifen, dass folgendes gilt:

$$u(t) = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{(Induktionsgesetz)}$$

Da wir aber nur den Verlauf der Spannung direkt messen können, also u bekannt ist setzen wir für

$$u(t) = \hat{U} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \text{ und erhalten}$$

$$\hat{U} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Um Φ zu bekommen nehmen wir $-N$ auf die andere Seite und integrieren das ganze nach t

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \cdot \int \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot dt$$

Mittels Substitutionsregel (s als Substitutionsvariabel) erhalten wir:

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \cdot \int \sin(s) \cdot dt$$

$$s = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t \quad \frac{ds}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot f \quad dt = \frac{ds}{2 \cdot \pi \cdot f}$$

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \int \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \frac{\hat{U}}{-N} \int \sin(s) \cdot \frac{ds}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\hat{U}}{-N} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f} \int \sin(s) \cdot ds$$

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \frac{-\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot f} + C$$

$$\Phi(t) = \frac{\hat{U}}{-N} \frac{-\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot f} \quad \text{und } \Phi = A \cdot B \text{ (Magnetischer Fluss)}$$

$$A = \frac{\hat{U} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad B = B_{\max} \text{ also } \hat{B}$$

$$A_{\max} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\hat{U} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \right) = \frac{\hat{U}}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{\underline{\underline{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}}}$$

2.1.2 Eisenmasse

Wie Kapitel 1.3.2

$$m_{Fe} = V \cdot \rho = \rho \cdot l \cdot A = \frac{\rho \cdot l \cdot \sqrt{2} \cdot U}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{m_{Fe} = f_1(f, \dots) = \frac{\rho \cdot l \cdot \sqrt{2} \cdot U}{N \cdot B \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}}}$$

m_{Fe} : Eisenmasse

ρ Dichte Eisen, ca. $\frac{7kg}{dm^3} = \frac{7000kg}{m^3}$

U: Effektivwert der Spannung

N: Die Windungen (Primärwicklung)

B: Maximale zulässige magnetische Flussdichte

f: Frequenz

Verdreifachen wir die Frequenz wird die Masse des Eisens dreimal kleiner.

2.2 B2: Widerstandszunahme durch Stromverdrängung (Skinneffekt)

Bei diesem Thema war es ein bisschen kompliziert die richtige Literatur zu finden:

Unser Lehrmittel² spricht von einem gleichbleibenden Widerstand bis 1000Hz, folglich wäre:

$$\frac{R(f)}{R_0} = 1 \quad \left| \quad f < 1000 \text{ Hz} \right.$$

Nach einer Recherche im Internet findet man auf der deutschen³ Wikipedia Seite, bzw. bei ihrem etwas umfangreicheren englischen⁴ Bruder eine äquivalente Leitschichtdicke δ :

$$\delta(f) = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \sigma \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{\omega \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} = \left[\sqrt{\frac{\frac{Vm}{A}}{\frac{Vs}{sAm}}} \right] = \sqrt{[m^2]} = [m]$$

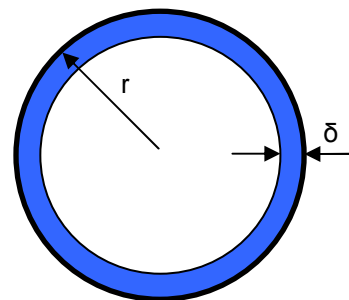
- δ : äquivalente Leitschichtdicke (Skindicke)
- f : Frequenz t^{-1}
- μ_0 : Magnetische Feldkonstante (1.257E-6 Vs/(Am))
- μ_r : Permeabilität (Cu=0.9999904)
- ρ : Spezifischer elektrischer Widerstand
(Cu: 0.0178 $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ = 0.0000000178 $\Omega \cdot \text{m}^2/\text{m}$)

Wir haben verschiedene Formeln gefunden um den Widerstand direkt zu berechnen, doch liefern diese unterschiedliche Resultate. Die Schichtdicke scheint jedoch ein gemeinsamer Nenner zu sein, deshalb versuchen wir nur diese Formel zu brauchen. Die Skindicke ist bei 100 Hz und 25² Kabel grösser als dessen Radius, erst bei 547.34 Hz kreuzen sich diese beiden Linien. Vermutlich wird das Verhalten des Leiters an dieser Stelle nicht un stetig sein Wir nehmen an, dass der Widerstand bis zu dieser Stelle R_0 entspricht.

Wir rechnen nun also mit einem Hohlzylinder:

$$A_{Ring}(f) = \begin{cases} r^2 \cdot \pi & \text{für } \delta(f) \geq r \\ (r^2 - (r - \delta(f))^2) \cdot \pi & \text{für } \delta(f) < r \end{cases}$$

$$R(f) = \frac{\rho \cdot l}{A_{Ring}(f)}$$

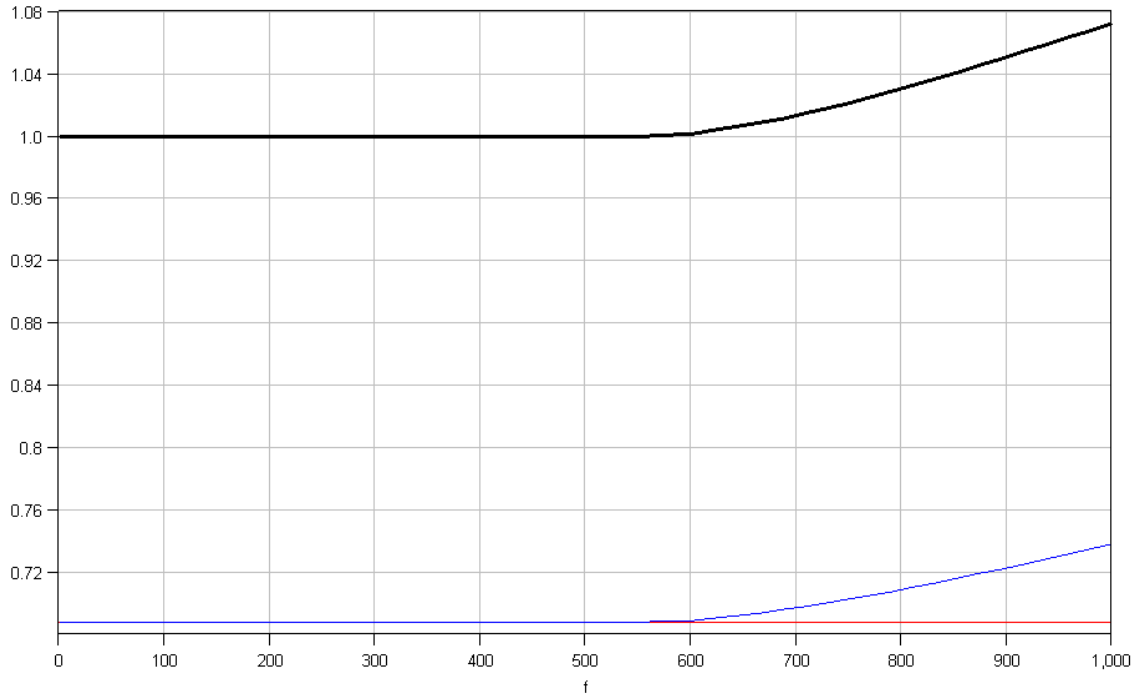


² Heinz Meister – Elektrotechnische Grundlagen S. 223

³ <http://de.wikipedia.org/wiki/Skinneffekt>

⁴ http://en.wikipedia.org/wiki/Skin_effect

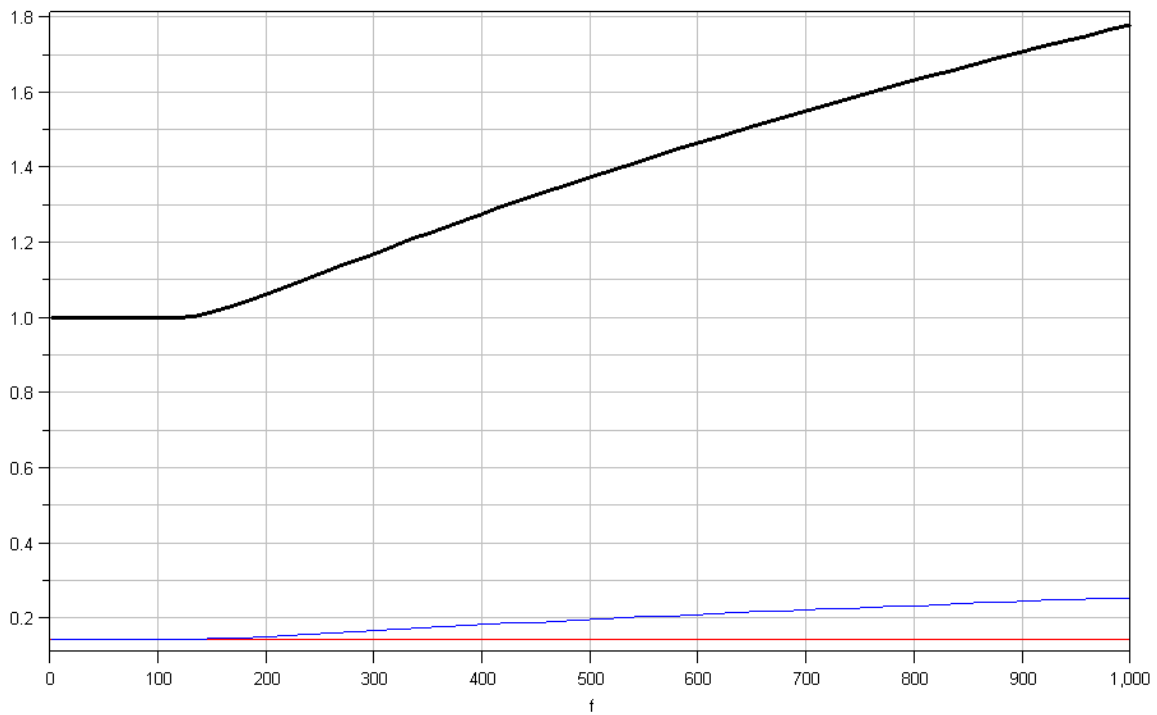
25mm² (Länge: 1m)



Rot: Gleichstromwiderstand in mΩ
Schwarz: Verhältnis $R(f)/R_0$

Blau: Wechselstromwiderstand in mΩ

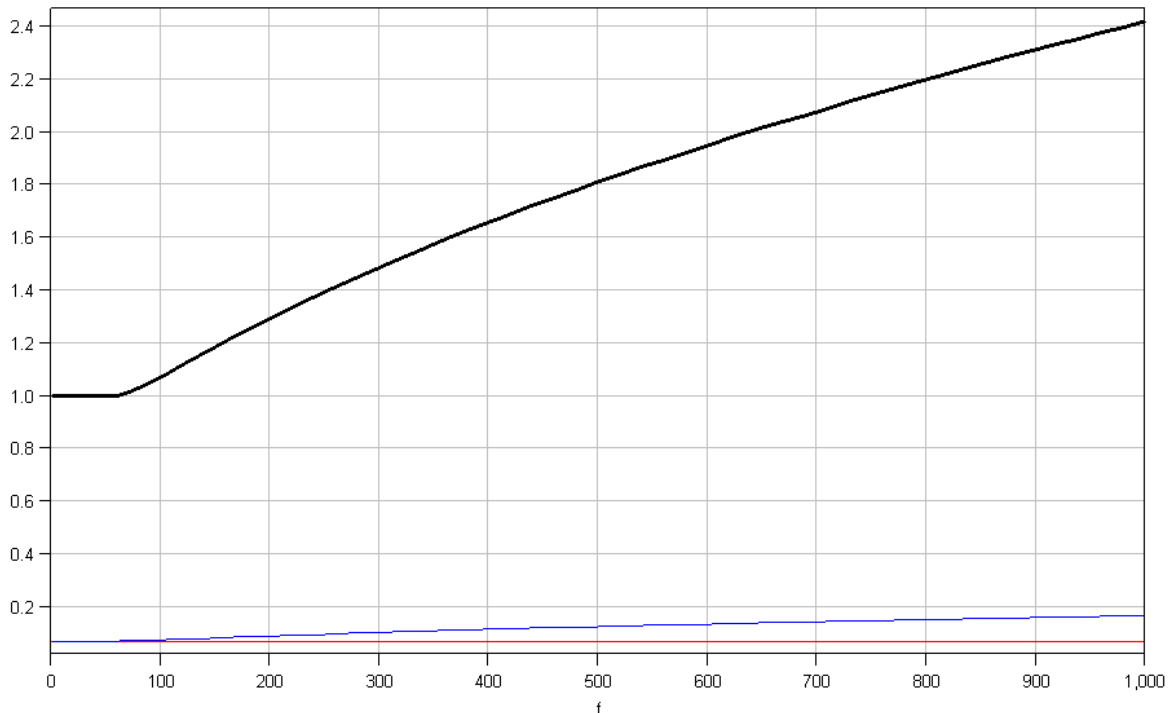
2.2.1 120mm² (Länge: 1m)



Rot: Gleichstromwiderstand in mΩ
Schwarz: Verhältnis $R(f)/R_0$

Blau: Wechselstromwiderstand in mΩ

2.2.2 250mm² (Länge: 1m)



Rot: Gleichstromwiderstand in mΩ
Schwarz: Verhältnis R(f)/R₀

Blau: Wechselstromwiderstand in mΩ

2.2.3 Bemerkungen

Des weitern haben wir herausgefunden, dass laut englischer Wikipedia folgendes gelten sollte:

$$J = J_s \cdot e^{-\frac{d}{\delta}} \quad \text{und} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \sigma \cdot \mu}}$$

J: Stromdichte an der Stelle d

J_s: Gleichstrom Stromdichte

d: Tiefe von der Oberfläche her

δ: Stelle bei der Stromdichte auf e⁻¹ abgesunken ist

Problematisch ist aber die Aussage aus einem Buch⁵ der FH Bibliothek dass es bei bestimmten Frequenzen und Querschnitten sogar dazu kommen kann, dass im innern des Drahtes der Vektor der Stromdichte entgegengesetzt ist, was wir mit der Formel von Wikipedia nie erreichen werden, womit eine der beiden Quellen falsch sein muss. Logische Schlussfolgerung wäre, das ganze mittels Versuchsaufbau zu überprüfen.

⁵ Horst Hänsel / Werner Neumann - Physik Band II Elektrizität, Optik, Raum und Zeit, Abbildung S.224

2.2.4 FAZIT

Ab einem bestimmten Querschnitt und höheren Frequenzen fällt allenfalls der Leiterwiderstand höher aus. Durch Litze, oder Spezialleiter mit grösserer Oberfläche die mit Füllmaterial oder einzeln isoliert, kann diesem Entgegen gewirkt werden. Andererseits ist zu sagen, dass für kleine Leiter bis 1kHz praktisch keine Zunahme des Widerstandes zu sehen ist.

2.3 Teilaufgabe B3

Geg: $U_a=115V$
 $R_L=0,325\Omega$
 $R_{20^\circ C}=10.3m\Omega$ $L=0.0336mH$

Ges: $\underline{U}_e = \underline{R}_L \cdot \underline{I}$

2.3.1 Lösung a)

$$U_e(f) = |\underline{R}_L \cdot \underline{I}| = \left| \underline{R}_L \cdot \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_{Ges}} \right|$$

$$U_e(f) = \left| \underline{R}_L \cdot \frac{\underline{U}_a}{R_L + R_{20^\circ C} + j\omega L} \right|$$

$$U_e(f) = \left| \underline{R}_L \cdot \frac{\underline{U}_a}{R_L + R_{20^\circ C} + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} \right|$$

2.3.2 Lösung b)

$U(60) = 111.3878867V$
 $U(400) = 108.0919371V$

$$\frac{U(400)}{U(60)} = 97.041\%$$

Folglich ist die Spannung etwa 3% kleiner

3 C: Ventilatorantrieb in Steinmetzschaltung

3.1 Daten der Schaltung

3.1.1 a) Motordaten am Drehstromnetz

Gegeben: $U_V = 3 \times 200V$ Annahme: $f = 400Hz$ in Stern geschaltet $P_N = 300W$ $\cos(\varphi) = 0.8$

$$P_N = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \quad \rightarrow \quad I_{Str} = \frac{P_N}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos(\varphi)} = 1.0825A$$

$$U_{Str} = \frac{U}{\sqrt{3}} = 115.47V$$

$$\varphi = \arccos(0.8) = 36.870^\circ \quad \text{Annahme: } \varphi_I = 0^\circ \quad \varphi = \varphi_U - \varphi_I \quad \rightarrow \quad \varphi_U = 36.870^\circ$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}_{Str}}{\bar{I}_{Str}} = \frac{U_{Str} \cdot e^{j\varphi_U}}{I_{Str} \cdot e^{j\varphi_I}} = \frac{U_{Str}}{I_{Str}} \cdot e^{j\varphi} = (85.3 \bar{;} 64.0j) = (106.6666667 \angle 36.86989761^\circ)$$

Gesucht:

$$R = \text{Re}(\bar{Z}) = 85.3\bar{\Omega} \quad X_L = \text{Im}(\bar{Z}) = 64\bar{\Omega} \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2 \cdot \pi \cdot f} = 25.4648mH$$

3.1.2 b) Motordaten am Einphasennetz

Im Prinzip ist sollte $R_E=R_N$ sein, weil dieser doch von der Geometrie der Wicklung abhängt, doch wollen wir das besser überprüfen und rechnen beide Varianten:

Gegeben:

$$U_{ph} = 115V \quad f = 400Hz \quad P_E = 0.3 \cdot P_N = 0.3 \cdot 300W = 90W$$

$$\cos(\varphi_E) = 0.5 \quad L_E = L_N = 25.4648mH \rightarrow X_{LE} = X_{LN} = 64\Omega$$

$$P_N = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \quad \rightarrow \quad I_{Str} = \frac{P_N}{\sqrt{3} \cdot U_{ph} \cdot \cos(\varphi_E)} = 0.90368A$$

$$U_{Str} = \frac{U_{ph}}{\sqrt{3}} = 66.395V$$

$$\varphi = \arccos(0.5) = 60^\circ \quad \text{Annahme: } \varphi_I = 0^\circ \quad \varphi = \varphi_U - \varphi_I \rightarrow \varphi_U = 60^\circ$$

Gesucht:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}_{Str}}{\bar{I}_{Str}} = \frac{U_{Str} \cdot e^{j\varphi_U}}{I_{Str} \cdot e^{j\varphi_I}} = \frac{U_{Str}}{I_{Str}} \cdot e^{j\varphi} = (36.6288; 63.6288j) \quad R_E = \text{Re}(\bar{Z}) = 36.6288\Omega$$

Kürzere Variante:

$$\tan(\varphi) = \frac{X_{LE}}{R} \quad \rightarrow R = \frac{X_{LE}}{\tan(\varphi)} = \frac{X_{LE}}{\tan(\arccos(0.5))} = 36.950\Omega$$

Somit haben wir 2 mögliche Lösungen.

$$\bar{Z}_i = \{(36.6288; 63.6288j); (36.950; 64.000j)\}$$

3.2 C2: Spannungen und Ströme der Steinmetzschaltung

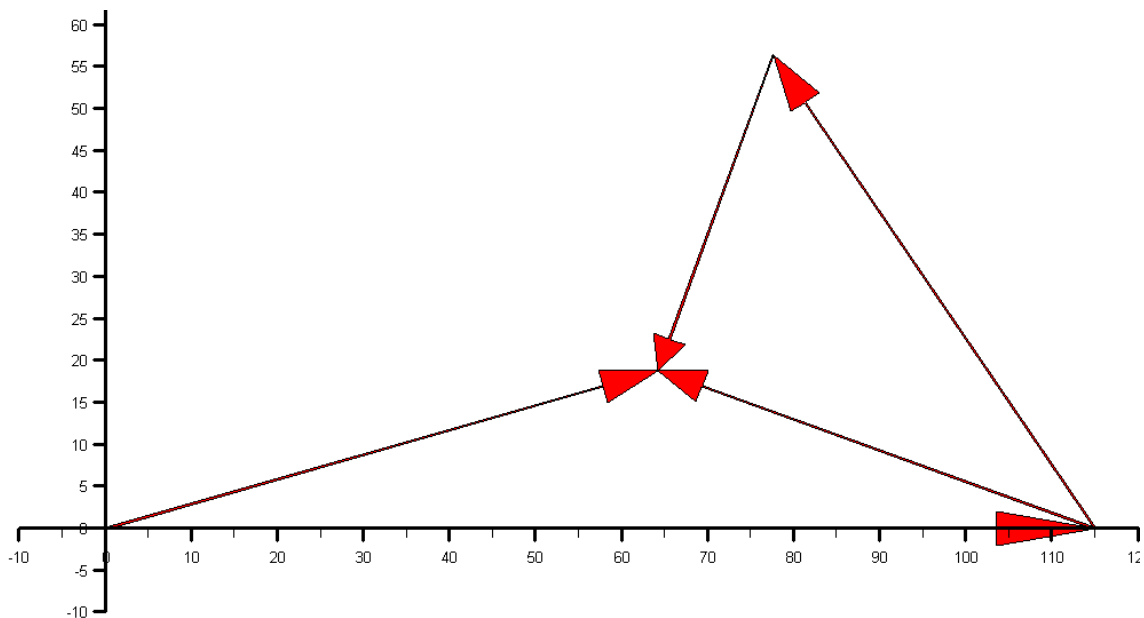
Zu berücksichtigen ist ausserdem, dass die Spannungs- und Strompfeile bei unserer *Berechnung* immer von der Null weg zeigt und nicht so wie auf dem ersten Blatt der Aufgabenstellung alle auf den Sternpunkt. Wir werden dies aber bei den Resultaten und der Grafik berücksichtigen. Explizit sind das I_2 und U_2

Gegeben:

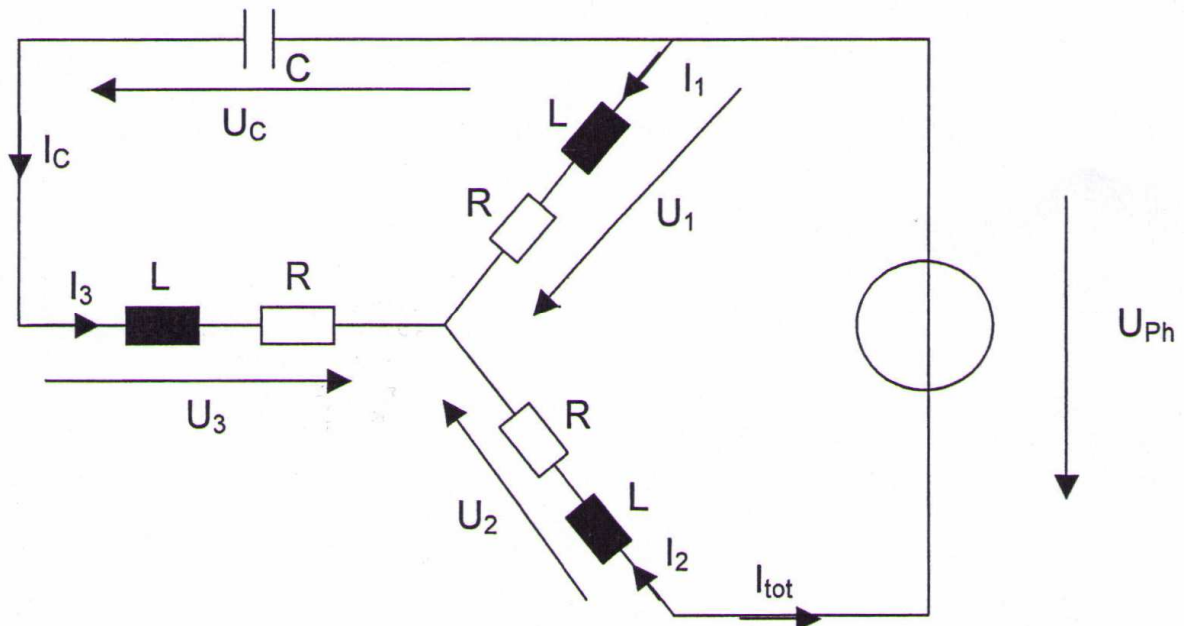
$$U_{ph} = 115V$$

$$f = 400Hz$$

Zuerst haben wir das Ganze nicht wie vorgeschlagen mit den Werten von C1b durchgerechnet, wobei sich herausstellte, dass es auch mit anpassen des Kondensators nicht möglich ist eine einigermassen symmetrische Schaltung hin zu bekommen (mit $2.2\mu F$):



Wir haben gedacht: „Wie ist es möglich, dass sich der Wirkwiderstand der Stränge verändert, diese sind fix durch das verwendete Leitungsmaterial und den entsprechenden Länge, Querschnitt gegeben! Allenfalls ist es möglich dass sich durch die Steinmetzschaltung z.B. bei einem Asynchronmotor der Blindwiderstand verändert (z.B. leicht andere Drehzahl \rightarrow verändertes magnetisches Feld), doch der Wirkwiderstand kann sich unmöglich ändern, er ist durch die Leitfähigkeit, Länge und Querschnitt der Wicklung fest gegeben. Erst nach dem wir das Ganze mit den Werten aus C1b gerechnet haben, haben wir gemerkt, dass man nur ein einigermassen symmetrisches *Bild* bekommt wenn man den $\cos(\varphi)$ auf 0.5 wählt, so dass der Blindwiderstand im Verhältnis zum Wirkwiderstand grösser ist.



Gegeben:

$$U_{Ph} = (115; 0j)$$

$$\bar{Z}_{\text{AufgabeC1b}} = \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = (36.95041724; 64.0j)$$

$$C = 3.3\mu F \quad \bar{Z}_C = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = (0; -120.572j)$$

Gesucht/Lösung:

$$\bar{Z}_{tot} = \bar{Z}_2 + \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_1}} = (104.1131144; 60.96324088j)$$

$$\bar{I}_{tot} = \frac{\bar{U}_{Ph}}{\bar{Z}_{tot}} = (0.8225447238; -0.4816395362j)$$

Um herauszufinden ob wir in etwa auf dem richtigen Weg sind rechnen wir

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = (94.59264324; 55.38854666j)$$

$$\varphi = \arg(\bar{S}) = 30.35102722^\circ$$

$$S = \text{abs}(\bar{S}) = 109.6159626 \text{ VA}$$

Was leider etwa 20% daneben ist.

$$\bar{U}_2 = Z_2 \cdot I_{tot} = (61.21830105; 34.84608049j)$$

$$U_2 = abs(\bar{U}_2) = 70.44096613V$$

$$\varphi_{U_2} = arg(\bar{U}_2) = 29.64897275^\circ - 180^\circ = \underline{\underline{-150.3510715^\circ}}$$

$$-\bar{I}_2 = \bar{I}_{tot} = (0.8225447238; -0.4816395362j)$$

$$I_{tot} = I_2 = abs(\bar{I}_2) = 0.9531822834A$$

$$\varphi_{tot} = arg(\bar{I}_2) = -30.35102723^\circ$$

Bei I_2 noch das Minus berücksichtigen $\varphi_{I_2} = arg(\bar{I}_2) = -30.35102723^\circ + 180^\circ = \underline{\underline{149.64897277^\circ}}$

$$U_1 = U_{PH} + U_2$$

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_{||3C} = \bar{Z}_{||3C} \cdot I = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_C}} = (53.78169893; -34.84608050j)$$

(67.16269716; -3.036759114j)

$$U_1 = abs(\bar{U}_1) = 64.08369891V \quad \varphi_{U_1} = arg(\bar{U}_1) = -32.93989074^\circ$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{||C}}{\bar{Z}_1} = (-0.04447502498; -0.8660167136j)$$

$$I_1 = abs(\bar{I}_1) = 0.8671579880A \quad \varphi_{I_1} = arg(\bar{I}_1) = -92.93989072^\circ$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_C = \frac{\bar{U}_{||C}}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_C} = (0.8670197485; 0.3843771774j)$$

$$I_3 = I_C = abs(\bar{I}_3) = 0.9484034262A \quad \varphi_{I_3} = \varphi_{I_C} = arg(\bar{I}_3) = 23.90921889^\circ$$

$$\bar{U}_C = \bar{Z}_C \cdot \bar{I}_C = (46.34509681; -104.5382414j)$$

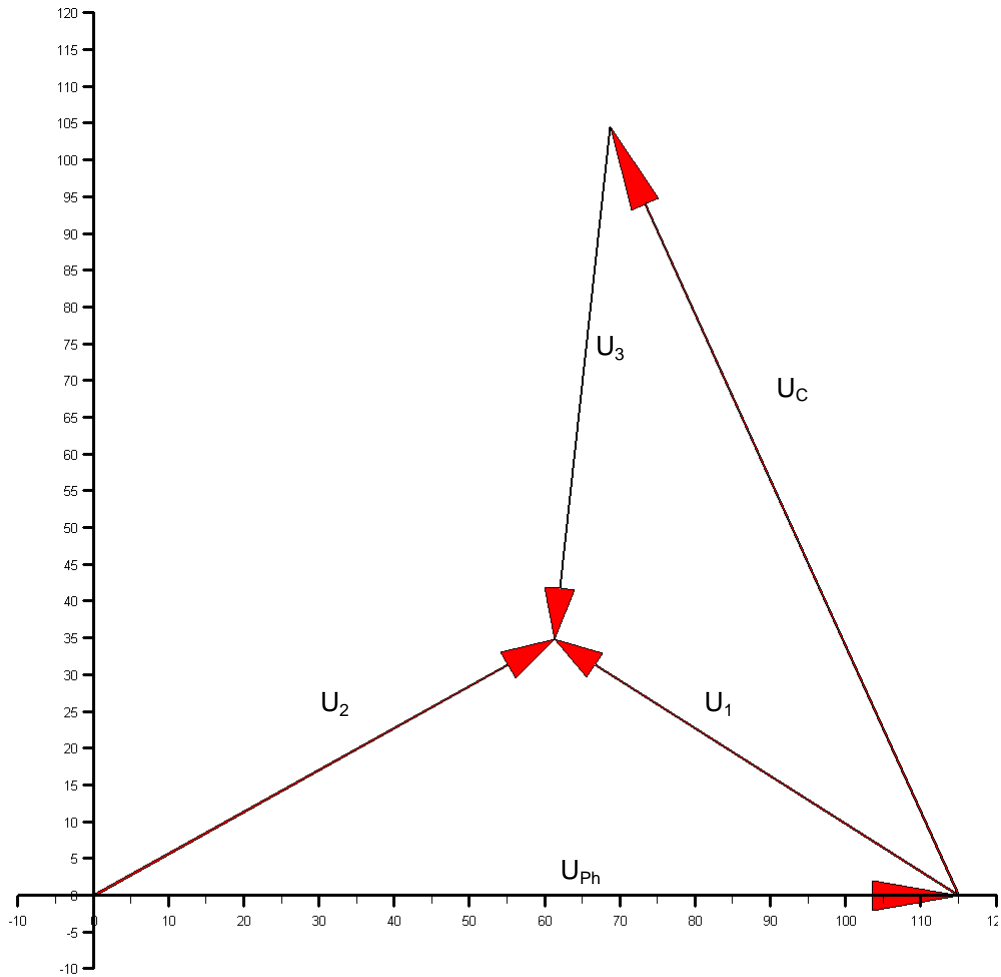
$$U_C = abs(\bar{U}_C) = 114.3508282V \quad \varphi_{U_C} = arg(\bar{U}_C) = -66.09078106^\circ$$

$$\bar{U}_3 = \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_C = (7.436602113; 69.69216098j)$$

$$U_3 = abs(\bar{U}_3) = 70.08780460V \quad \varphi_{U_3} = arg(\bar{U}_3) = 83.90921886^\circ$$

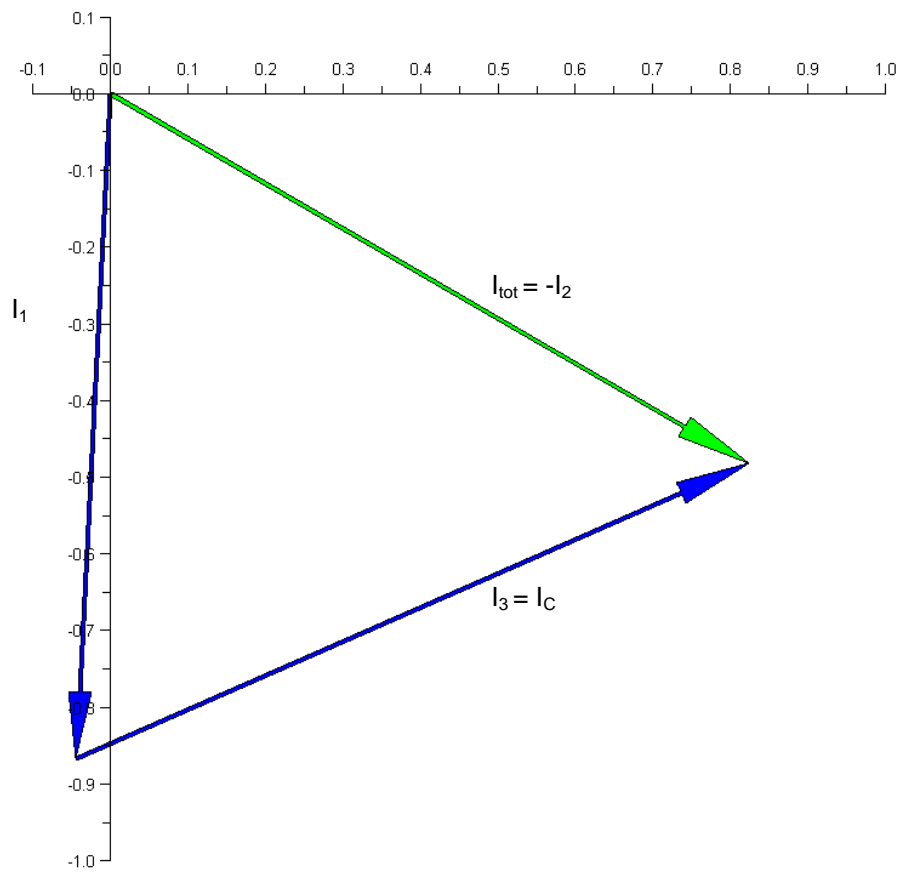
3.3 C3: Zeigerdiagramme der Steinmetzschaltung

3.3.1 C3a Spannungspfeile (1mm=1V)



3.3.2 C3b Strompfeile (1cm=0.1A)

$$\bar{I}_{tot} = -\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \bar{I}_3$$



3.4 C4: Qualität der Drehspannung bei der Steinmetzschaltung

$$U_{PhN} = 230V \quad \Delta\varphi_N = 120^\circ$$

$$\frac{|\bar{U}_1|}{U_{PhN}} = 27.862\%$$

$$\frac{|\bar{U}_2|}{U_{PhN}} = 30.626\%$$

$$\frac{|\bar{U}_3|}{U_{PhN}} = 30.472\%$$

$$\Delta\varphi_{U_1U_2} = \arg\left(\frac{\bar{U}_1}{-\bar{U}_2}\right) = 117.41^\circ$$

$$\frac{\Delta\varphi_{U_1U_2}}{\Delta\varphi_N} = 97.84\%$$

$$\Delta\varphi_{U_2U_3} = \arg\left(\frac{-\bar{U}_2}{\bar{U}_3}\right) = 125.73^\circ$$

$$\frac{\Delta\varphi_{U_2U_3}}{\Delta\varphi_N} = 104.7\%$$

$$\Delta\varphi_{U_3U_1} = \arg\left(\frac{\bar{U}_3}{\bar{U}_1}\right) = 116.84^\circ$$

$$\frac{\Delta\varphi_{U_3U_1}}{\Delta\varphi_N} = 97.36\%$$

4 D: Kabel der Bordsprechverbindung

4.1 D1: Kabelwiderstand, Isolationswiderstand

4.1.1 Gegeben

$$U_S = 0.5V \quad I_S = 10mA$$

$$a = 2mm \quad l = 60m$$

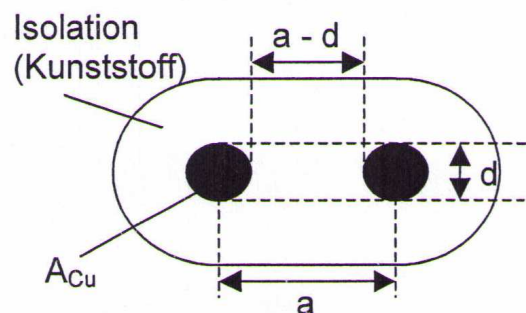
$$A_{Cu} = 0.3mm^2 \rightarrow d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 0.618mm$$

$$\rho_{Cu} = 0.0178\Omega \cdot mm^2 / m$$

$$\rho_I = 10^{13}\Omega \cdot mm^2 / m$$

$$R_E = 50\Omega$$

$$\mu_{rl} = 1 \quad \epsilon_{rl} = 5$$



4.1.2 Lösung a)

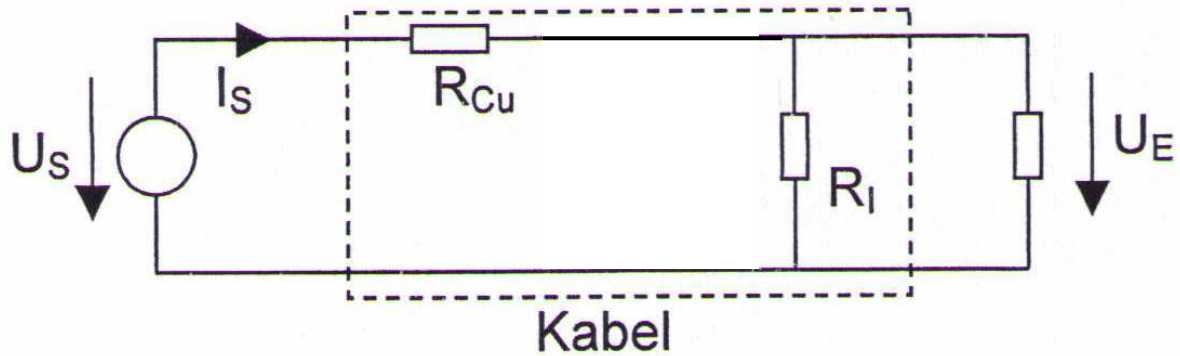
$$\frac{R_{Cu}}{2} = \frac{\rho_{Cu} \cdot l}{A} = 3.56\Omega$$

Hier gilt es zu Berücksichtigen das es im Prinzip eine hin und eine Rückleitung hat! Also ist der Gesamtwiderstand wie im Ersatzschaltbild dann doppelt so gross, also etwa 7.12Ω

4.1.3 Lösung b)

$$R_I = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{\rho_I \cdot (a - d)}{d \cdot l} = 372.673k\Omega \quad (\text{Vorsicht } l \text{ und } a-d \text{ in Grundeinheit umrechnen!})$$

4.1.4 Lösung c)



Spannungsquelle:

$$I_{tot} = \frac{U_S}{R_{tot}} = \frac{U_S}{R_{Cu} + \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_E}}}_{53.553\Omega}} = 9.336494089\text{mA}$$

$$U_E = U_S - R_{Cu} \cdot I_{tot} = 0.4667620810\text{V}$$

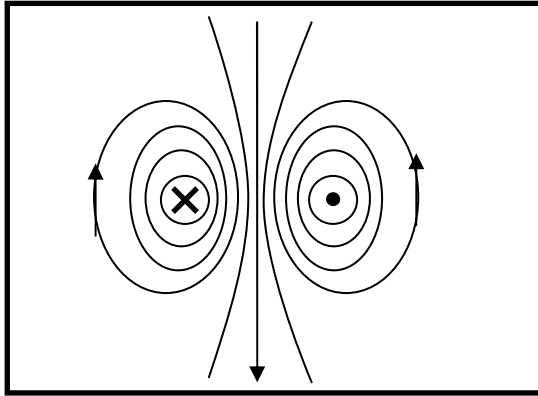
Stromquelle:

$$U = R_{tot} \cdot I_S = 0.5355329262\text{V}$$

$$U_E = U - R_{Cu} \cdot I_S = 0.4999329262\text{V}$$

4.2 D2 Kabelinduktivität

4.2.1 a) Skizze



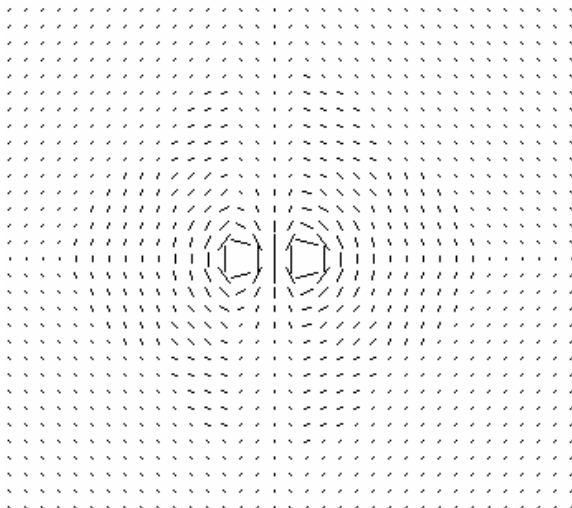
Wir gehen davon aus, dass ein Signal fließt, folglich fließt der Strom in einen Kabel in die eine, im andern in die andere Richtung. Da es sich beim Bordfunk wohl um ein akustisches Signal handelt, wird sich die Polarität mit der Zeit umdrehen, wir machen deshalb eine Aufnahme bei einem Amplitudenmaximum und vermerken, dass es kurze Zeit danach genau umgekehrt sein wird:

- X Strom in die Papierebene hinein
- Strom aus der Papierebene hinaus

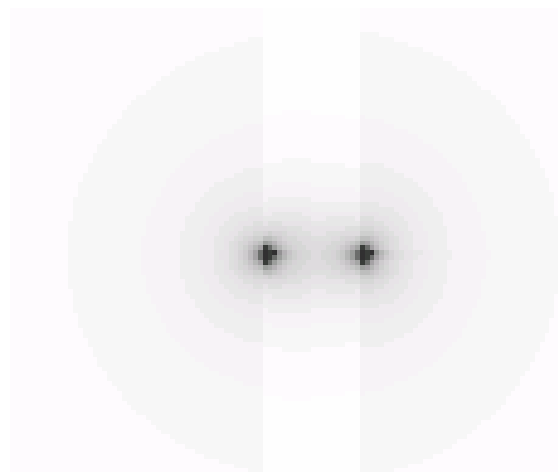
$$\vec{H}_{tot} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \frac{n \cdot I}{2 \cdot \pi} = \frac{n \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \left(-\vec{e}_x \cdot \sin(2\pi\varphi) + \vec{e}_y \cdot \cos(2\pi\varphi) \right) \text{ also}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(r, \varphi_r) = \begin{pmatrix} -\sin(2\pi\varphi_r) \\ \cos(2\pi\varphi_r) \end{pmatrix} \frac{n \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Schreiben wir nun ein Java⁶ Programm und Generieren zwei Vektorfelder $\vec{A}_{(m,n)}$ und $\vec{B}_{(m,n)}$ mit einem um je $x_0 = \pm 1mm$ vom Zentrum versetzten Ursprung, addiere diese vektoriell und stellen sie Grafisch dar, erhalten wir folgendes:



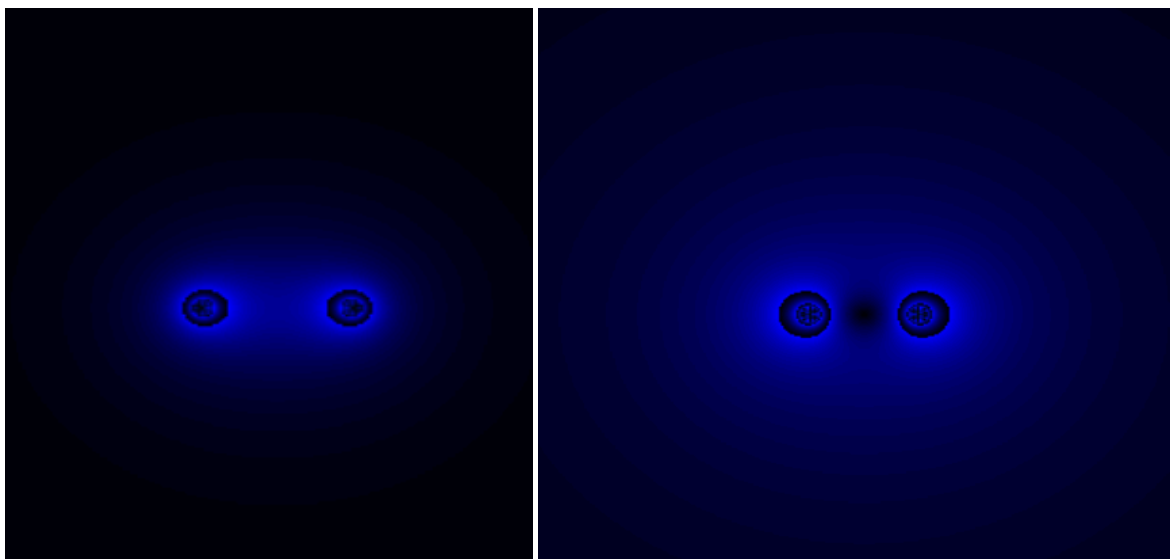
Zu den Vektoren proportionale Linien.



„Hochauflösend“ mit Graustufen, recht ungeeignet, da Java für solche Dinge sehr, sehr langsam ist.

⁶ Sourcecode auf CD

Auf C++ und DirectX portiert läuft es etwa 50x schneller, doch dabei ist mir aufgefallen, dass ich ein Problem habe, das auch schon in der Java Version zu sehen war: Quer durch das Bild geht ein Balken, der an den Rändern un stetig ist, und da haben ich mich gefragt, ist es ein Fließkomaproblem des Codes oder dürfen wir allenfalls gegenläufige Magnetfelder gar nicht einfach vektoriell addieren, sondern müssen wir das über ein übles integral rechnen? Nach dem mir ein Kollege den Tipp gegeben hatte, dass atan(z/x) nur Werte zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ liefert hat es dann geklappt. Man sieht sehr schön, dass das Feld deutlich stärker ist, wenn der Strom in die gleiche Richtung fließt und dass zwischen den beiden Leitern sich die Magnetfelder aufheben. Ausserdem haben wir, da wir jetzt ja entsprechende Rechenpower haben das ganze noch mit einem sinusförmigen Wechselstrom „bestückt“, so dass man sieht wie das Feld auf und abgebaut wird⁷. Im Prinzip könnte man nun auch ein Audiosignal vom Line-In des Computers drauf geben womit wir wahrscheinlich die Gruppe wären, die am nächsten an der Wirklichkeit ist.



Stromrichtung antiparallel

Stromrichtung parallel

4.2.2 b) Berechnung

Die Kabelinduktivität findet sich unter dem Stichwort: Lecher-Leitung⁸

Dies ist eine spezifische Angabe, das heisst wie viel Henry pro Meter und wir müssen das ganze noch mal 60m rechnen.

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} = 1.256637 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

$$\mu_r = 1$$

$$d = 0.618\text{mm} \text{ (aus vorheriger Aufgabe)}$$

$$a = 2\text{mm}$$

$$l = 60\text{m}$$

Physikbuch⁹:
$$L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right) = 0.747 \cdot 10^{-6} \left[\frac{V \cdot s}{A \cdot m} = \frac{H}{m} \right]$$

$$\underline{\underline{L = l \cdot L' = 0.0448\text{mH}}}$$

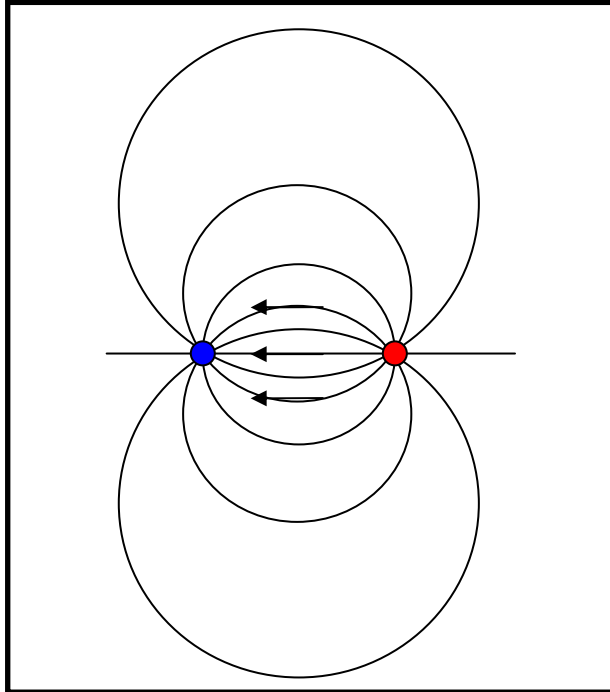
⁷ Auf der CD „Signal ++.exe“ bzw. „Signal +-.exe“ bzw. *.avi für jene die kein DirectX 9.0 oder höher haben.

⁸ <http://de.wikipedia.org/wiki/Lecher-Leitung>

⁹ Horst Hänsel / Werner Neumann - Physik Band II Elektrizität, Optik, Raum und Zeit, S.258

4.3 D3 Kabel Kapazität

4.3.1 A) Skizze



4.3.2 b) Berechnung

Auch die Kabelinduktivität findet sich unter dem Stichwort: Lecher-Leitung¹⁰

Dies ist auch eine Spezifische Angabe, das heisst wie viel Farad pro Meter und wir müssen das ganze noch mal 60m rechnen.

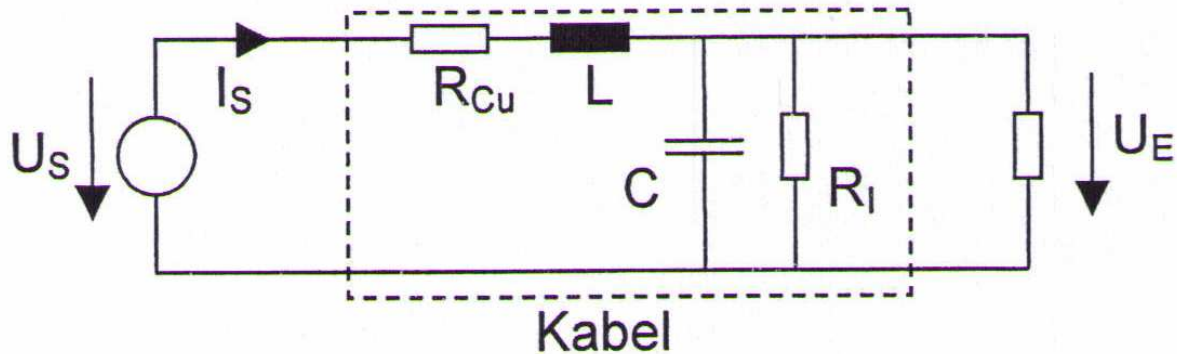
$$\varepsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \frac{C}{V \cdot m} = \left[\frac{A \cdot s}{V \cdot m} \right] \quad \varepsilon_r = 5$$

$$d = 2r = 0.618 \text{ mm} \quad (\text{wie vorherige Aufgabe}) \quad a = 2 \text{ mm} \quad l = 60 \text{ m}$$

$$C' = \pi \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{r}\right)} = 74.47462747 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C}{V \cdot m} = \frac{A \cdot s}{V \cdot m} \right] \quad C = l \cdot C' = 4.468477648 \text{ nF}$$

¹⁰ <http://de.wikipedia.org/wiki/Lecher-Leitung>

4.4 D4: Einfluss des Kabels bei verschiedenen Frequenzen



4.4.1 Mit U_S ($\varphi_{U_S} = 0^\circ$)

$$U_S = 0.5V$$

$$I_S = 0.01A$$

$${}^{(i)}f = \{1000, 1000000\}$$

(Index i=Array für die beiden Frequenzen)

$$R_{Cu} = 2 \cdot 3.56$$

$$R_E = 50$$

$$R_I = 372.673k\Omega$$

$$L = 0.0448mH$$

$${}^{(i)}X_L = 2 \cdot \pi \cdot {}^{(i)}f \cdot L$$

$${}^{(i)}Z_L = j \cdot {}^{(i)}X_L$$

$$C = 4.4685nF$$

$${}^{(i)}X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot {}^{(i)}f \cdot C}$$

$${}^{(i)}Z_C = \frac{{}^{(i)}X_C}{j}$$

$${}^{(i)}Z_{tot} = R_{Cu} + {}^{(i)}Z_L + \frac{1}{\frac{1}{{}^{(i)}Z_C} + \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_E}} = \{(57.11319410; 0.2113146369j), (23.95171684; 257.8611594j)\}$$

$${}^{(i)}I_{tot} = \frac{U_S}{{}^{(i)}Z_{tot}} = \{(8.754424670; -0.03239073036j); (0.1785680867; -1.922441476j)\} mA$$

$${}^{(i)}U_E = |U_S - (R_{Cu} + {}^{(i)}Z_L) \cdot {}^{(i)}I_{tot}| = \{0.4376650786V; 0.05600653169V\}$$

4.4.2 Mit I_S ($\varphi_{I_S} = 0^\circ$)

$${}^{(i)}U_{tot} = {}^{(i)}Z_{tot} \cdot I_S \quad |{}^{(i)}U_{tot}| = \{0.5711358503V; 2.589711611V\}$$

$${}^{(i)}U_E = {}^{(i)}U_{tot} - (R_{Cu} + {}^{(i)}Z_L) \cdot I_S = \{0.4999324336V; 0.2900815307V\}$$

5 Schlussbemerkungen

Positiv:

Interessante Aufgabenstellung, Möglichkeit für Leute mit Interesse tiefer in den ganzen Stoff hinein zu gehen, dennoch aber unter einem gewissen Druck zu stehen, so dass man sich nicht zu fest in die Details verbeisst.

Negativ:

Ich finde es schade, dass wir zu wenig Wissen über Integral / Differenzial vermittelt bekommen an dieser Schule, zumindest die Klasse 48 3i.

EURE KOMMENTARE... allefalls darauf hinweisen, dass es für euch zu viel stoff war ETC....